

## 1.- DATOS DE LA ASIGNATURA

Nombre de la asignatura:	<b>Cálculo Vectorial</b>
Carrera:	<b>Todas las Carreras</b>
Clave de la asignatura:	<b>ACF-0904</b>
(Créditos) SATCA <sup>1</sup>	<b>3 - 2 - 5</b>

## 2.- PRESENTACIÓN

### Caracterización de la asignatura.

En diversas aplicaciones de la ingeniería, la concurrencia de variables espaciales y temporales, hace necesario el análisis de fenómenos naturales cuyos modelos originan funciones vectoriales o escalares de varias variables. Se diseña esta asignatura con el fin de proveer al alumno de herramientas para analizar estas funciones de tal manera que se pueda predecir o estimar su comportamiento, y estudiar conceptos relacionados con ellas; haciendo hincapié en la interpretación geométrica siempre que sea posible.

El curso está diseñado de manera que posibilite al estudiante para representar conceptos, que aparecen en el campo de la ingeniería, por medio de vectores; resolver problemas en los que intervienen variaciones continuas; resolver problemas geométricos en forma vectorial; graficar funciones de varias variables; calcular derivadas parciales; resolver integrales dobles y triples; aplicar las integrales en el cálculo de áreas y volúmenes.

Con el diseño de este curso se pretende que al mismo tiempo que el alumno aprende el lenguaje de las matemáticas, adquiera estrategias para resolver problemas; elabore desarrollos analíticos para la adquisición de un concepto; piense conceptualmente, desarrolle actitudes para la integración a grupos interdisciplinarios y aproveche los recursos que la tecnología ofrece, como el uso de software de álgebra simbólica, calculadora gráfica y computadora.

### Intención didáctica.

La característica más relevante de la materia es el tratamiento a nivel intuitivo de los Campos escalares y vectoriales desde el inicio del curso, con el fin de dotar de significado a muchos de los conceptos que se estudiarán más adelante en el curso. El examinar y retomar, a lo largo de todo el curso, la importancia geométrica y física

<sup>1</sup> Sistema de asignación y transferencia de créditos académicos

de campos, como flujo de calor, flujo de energía, el gravitatorio o el asociado con cargas; análisis que servirá para dar significado a diversos subtemas del curso como álgebra vectorial, superficies de nivel, longitud de arco, vector tangente, etc. Esto permitirá que el alumno se sensibilice de la importancia del concepto “Campo” en el desarrollo de las bases conceptuales de la física y la ingeniería, así como en la consolidación del pensamiento científico.

La propuesta es llegar a las formalizaciones a partir de lo concreto; por ejemplo, primero se estudia la geometría de las operaciones vectoriales y después estas operaciones.

En la última unidad se aborda el concepto Integral de Riemann de funciones de varias variables y el concepto de coordenadas esféricas y cilíndricas, cuya intención es mostrar el potencial del cálculo en las aplicaciones donde se calcula un volumen; es decir, no se pretende ser exhaustivo en la resolución de distintos problemas sólo sensibilizar al alumno, del potencial que tiene el uso de estas coordenadas.

En la sección “Unidades de aprendizaje” se recomiendan actividades dirigidas a los estudiantes que pretenden servir de ejemplo para activar competencias al mismo tiempo que se adquieren conocimientos

### 3.- COMPETENCIAS A DESARROLLAR

<b>Competencias específicas</b>	<b>Competencias genéricas</b>
<p>Interpretar, reconstruir y aplicar modelos que representan fenómenos de la naturaleza en los cuales interviene más de una variable continua, en diferentes contextos de la ingeniería.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar las variables presentes en un problema.</li> <li>• Relacionar varias fuentes de información a la vez.</li> <li>• Reconocer y definir un problema.</li> <li>• Analizar fenómenos naturales</li> <li>• Sintetizar información.</li> <li>• Descubrir los datos relevantes.</li> <li>• Combinar diferentes enfoques o puntos de vista.</li> <li>• Proyectar imágenes en el espacio.</li> <li>• Inferir y deducir principios.</li> <li>• Razonar analógicamente.</li> <li>• Generar hipótesis.</li> <li>• Diseñar medios para verificar hipótesis.</li> <li>• Establecer relaciones virtuales</li> <li>• Pensar críticamente.</li> <li>• Desarrollar pensamiento lógico matemático.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar tecnologías computacionales y software para la graficación de funciones.</li> <li>• Buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas.</li> <li>• Comunicar con precisión y claridad y de manera explícita sus ideas</li> <li>• Organizar y planificar.</li> <li>• Tomar decisiones.</li> <li>• Explorar sistemáticamente la información.</li> <li>• Trabajar en equipo.</li> <li>• Aplicar los conocimientos a la práctica.</li> <li>• Codificar y decodificar información de una modalidad a otra.</li> <li>• Generalizar principios.</li> <li>• Tomar conciencia de sus propias estrategias de aprendizaje.</li> <li>• Aprender en forma autónoma</li> <li>• Buscar estrategias para lograr sus objetivos.</li> </ul>
--	--

#### 4.- HISTORIA DEL PROGRAMA

Lugar y fecha de elaboración o revisión	Participantes	Observaciones (cambios y justificación)
<b>Cd. de Matamoros, Tamaulipas del 9 al 13 de Marzo de 2009.</b>	Representantes de los Institutos Tecnológicos de León, Matamoros, Mérida y Milpa Alta.	Definición de los temarios.
<b>Cd. de Puebla, Puebla del 8 al 12 de junio del 2009</b>	Representantes de los Institutos Tecnológicos de León, Matamoros, Mérida y Milpa Alta.	Consolidación de los temarios.

#### 5.- OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DEL CURSO (competencia específica a desarrollar en el curso)

Conocer los principios y técnicas básicas del Cálculo en Varias Variables para interpretar y resolver modelos que representan fenómenos de la naturaleza en los cuales interviene más de una variable continua.

## 6.- COMPETENCIAS PREVIAS

Habilidad para abstraer, analizar y sintetizar problemas al lenguaje algebraico, que involucren el cálculo diferencial, integral y operaciones de álgebra lineal.

- Dominio de:
  - Álgebra intermedia, Trigonometría y Geometría Analítica.
  - Determinantes de  $2 \times 2$  Y  $3 \times 3$ .
  - Funciones y sus diferentes representaciones.
  - Límites.
  - Continuidad.
  - Cálculo Diferencial.
  - Sumas de Riemann.
  - Cálculo Integral.
  - Conocimiento de algunas de las aplicaciones de la integral de Riemann.
  - Conocimiento de la relación entre derivada e integral de una función.
  
- Habilidades:
  - Usar el vocabulario propio de las matemáticas.
  - Uso de tecnologías de información y comunicación, como: calculadora, computadora, Windows, internet.
  - Representar puntos, rectas, planos y cónicas en el plano y en el espacio.
  - Interpretar el comportamiento de funciones.
  - Interpretación y análisis de problemas.
  - Identificar las variables importantes de un problema.
  - Derivar funciones algebraicas y trascendentes.
  - Diferenciar.
  - Mostrar geoméricamente el Teorema Fundamental del Cálculo.
  - Emplear el teorema del valor medio.
  - Determinar el área comprendida entre dos curvas.
  - Calcular volúmenes de sólidos de revolución.
  - Resolver problemas usando las diferentes técnicas de integración.
  - Resolver integrales impropias.
  - Resolver problemas prácticos donde se requiere la utilización del cálculo diferencial e integral.
  - Habilidad para codificar al lenguaje algebraico, problemas que involucren el cálculo diferencial e integral.

## 7.- TEMARIO

Unidad	Temas	Subtemas
1	Algebra de vectores.	<p>1.1 Definición de un vector en <math>\mathbb{R}^2</math>, <math>\mathbb{R}^3</math> y su Interpretación geométrica.</p> <p>1.2 Introducción a los campos escalares y vectoriales.</p> <p>1.3 La geometría de las operaciones vectoriales.</p> <p>1.4 Operaciones con vectores y sus propiedades.</p> <p>1.5 Descomposición vectorial en 3 dimensiones.</p> <p>1.6 Ecuaciones de rectas y planos.</p> <p>1.7 Aplicaciones físicas y geométricas.</p>
2	Curvas en $\mathbb{R}^2$ y ecuaciones paramétricas.	<p>2.1 Ecuación paramétrica de la línea recta.</p> <p>2.2 Curvas planas.</p> <p>2.3 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica.</p> <p>2.4 Derivada de una función dada paraméricamente.</p> <p>2.5 Coordenadas polares.</p> <p>2.6 Graficación de curvas planas en coordenadas polares.</p>
3	Funciones vectoriales de una variable real.	<p>3.1 Definición de función vectorial de una variable real.</p> <p>3.2 Graficación de curvas en función del parámetro t.</p> <p>3.3 Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades.</p> <p>3.4 Integración de funciones vectoriales.</p> <p>3.5 Longitud de arco.</p> <p>3.6 Vector tangente, normal y binormal.</p> <p>3.7 Curvatura.</p> <p>3.8 Aplicaciones.</p>

**TEMARIO (continuación)**

Unidad	Temas	Subtemas
4	Funciones reales de varias variables.	4.1 Definición de una función de varias variables. 4.2 Gráfica de una función de varias variables. 4.3 Curvas y superficies de nivel. 4.4 Derivadas parciales de funciones de varias variables y su interpretación geométrica. 4.5 Derivada direccional. 4.6 Derivadas parciales de orden superior. 4.7 Incrementos, diferenciales y regla de la cadena. 4.8 Derivación parcial implícita. 4.9 Gradiente. 4.10 Campos vectoriales. 4.11 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física. 4.12 Valores extremos de funciones de varias variables.
5	Integración.	5.1 Introducción. 5.2 Integral de línea. 5.3 Integrales iteradas dobles y triples. 5.4 Aplicaciones a áreas y solución de problema. 5.5 Integral doble en coordenadas polares. 5.6 Coordenadas cilíndricas y esféricas. 5.7 Aplicación de la integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

## 8.- SUGERENCIAS DIDÁCTICAS (desarrollo de competencias genéricas)

- Los ejemplos de actividades sugeridas están dirigidas a los estudiantes, el papel del profesor será el de mediador para lograr la co-reconstrucción del conocimiento.
- Investigar el origen histórico, el desarrollo y definiciones planteadas en los conceptos involucrados en el tema.
- Analizar y discutir, sobre la aplicación de los conceptos, en problemas reales relacionados con la ingeniería en que se imparta esta materia.
- Presentar siempre el concepto antes de su expresión matemática, posteriormente se podrán hacer problemas numéricos.
- Propiciar el uso de Software de matemáticas (Derive, Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab) o la calculadora graficadora como herramientas que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados.
- Abordar el concepto de integral de funciones de varias variables como generalización de la integral de funciones de una variable.
- Usar algunas de las aplicaciones de la integral de Riemann.
- Promover grupos de discusión y análisis sobre conceptos previamente investigados, después establecer definiciones necesarias y suficientes para el desarrollo del tema.
- Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes.
- Propiciar el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de la asignatura (procesador de texto, hoja de cálculo, base de datos, graficador, Internet, etc.).
- Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración de y entre los estudiantes.
- Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales encaminan al alumno hacia la investigación.
- Llevar a cabo actividades prácticas que promuevan el desarrollo de habilidades para la experimentación, tales como: identificación manejo y control de variables y datos relevantes, planteamiento de hipótesis y trabajo en equipo.
- Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura.
- Proponer problemas que permitan al estudiante la integración de contenidos de la asignatura y entre distintas asignaturas, para su análisis y solución.
- Relacionar los contenidos de la asignatura con el cuidado del medio ambiente; así como con las prácticas de una agricultura sustentable.
- Observar y analizar fenómenos y problemáticas propias del campo ocupacional.

- Relacionar los contenidos de esta asignatura con las demás del plan de estudios para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.
- Cuando los temas lo requieran, utilizar medios audiovisuales para una mejor comprensión del estudiante.

## 9.- SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

La evaluación debe ser continua y cotidiana por lo que se debe considerar el desempeño en cada una de las actividades de aprendizaje, poniendo énfasis en:

- El avance personal de cada estudiante.
- Reportes escritos de las conclusiones hechas durante las actividades.
- Información obtenida durante las investigaciones solicitadas, plasmadas en documentos escritos.
- Exámenes escritos para comprobar el manejo de contenidos teóricos y procedimentales.

## 10.- UNIDADES DE APRENDIZAJE

### Unidad 1: Álgebra de vectores.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Analizar de manera intuitiva campos escalares y vectoriales del entorno.</li> <li>• Identificar la manifestación de un vector en distintos contextos.</li> <li>• Resolver con soltura operaciones entre vectores.</li> <li>• Determinar ecuaciones de rectas y planos dados, así como asociar gráficas de planos y rectas a ecuaciones dadas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hacer una reseña histórica del nacimiento del Cálculo de varias variables, haciendo hincapié en la situación económica, política y cultural del ambiente en el que se desarrolló, así como la cognitiva, en cuanto al requisito particular del ritmo instantáneo de cambio de variables, haciendo notar que en la actualidad las funciones de varias variables tienen muchas aplicaciones ya que se pueden describir fenómenos mediante la interdependencia de varias variables.</li> <li>• Mediar para que los alumnos llenen las líneas intercaladas en la introducción a los Sistemas <math>R^2</math> y <math>R^3</math>, y hacer las figuras mencionadas (Ver práctica #1).</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proponer la elaboración gráfica de una situación que implique suma de vectores y posteriormente pedir que se permuten los vectores, solicitar que el alumno arroje un principio (el de conmutación de vectores).</li> <li>• Graficar los vectores de un campo vectorial a partir de una expresión de la física.</li> <li>• Mostrar diversas gráficas de campos escalares y vectoriales pidiendo al alumno que identifique las diferencias e iniciar la construcción de las operaciones vectoriales.</li> <li>• A partir de la geometría de las operaciones vectoriales, inducir la construcción de las propiedades de las operaciones.</li> </ul>
--	--

## Unidad 2: Curvas en $\mathbb{R}^2$ y ecuaciones paramétricas.

<b>Competencia específica a desarrollar</b>	<b>Actividades de Aprendizaje</b>
<p>Construir la gráfica de una curva plana en forma paramétrica eligiendo la técnica más apropiada.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elige un punto y un director de tu campo.</li> <li>• Escribe la ecuación de la línea recta.</li> <li>• Extiéndela a una forma vectorial.</li> <li>• Interpretala geoméricamente.</li> <li>• Realiza las operaciones indicadas.</li> <li>• Las ecuaciones obtenidas se llaman ecuaciones paramétricas de la recta.</li> <li>• Desdobra la igualdad en dos igualdades escalares.</li> <li>• Una recta pasa por el punto <math>A(-1,3)</math> y tiene un vector director <math>V = (2,5)</math>, escribe sus ecuaciones paramétricas.</li> <li>• Da valores al parámetro <math>t</math> y grafica el conjunto de vectores de posición que obtienes.</li> <li>• Introduce tus datos en un graficador.</li> <li>• Compara tu gráfica con las gráficas examinadas en la unidad 1, identifica semejanzas y diferencias.</li> <li>• Visualizar, con ayuda del software, gráficas de curvas planas.</li> </ul>

### Unidad 3: Funciones vectoriales de una variable real.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"><li>• Reconocer una función vectorial en distintos contextos y manejarla como un vector.</li><li>• Manejar con soltura ecuaciones paramétricas y el software para graficar curvas.</li><li>• Analizar gráficas de curvas de funciones vectoriales en el espacio.</li><li>• Determinar los parámetros que definen una curva en el espacio.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Introducir la problemática relativa al movimiento en el espacio y al análisis de curvas.</li><li>• Abordar los conceptos con ejemplos de la cinemática, mencionando el movimiento.</li><li>• A partir de analogías extender el concepto de función real de variable real a función vectorial de variable real.</li><li>• Visualizar, con ayuda del software, gráficas relativas a funciones vectoriales.</li></ul>

### Unidad 4: Funciones reales de varias variables.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"><li>• Analizar de manera formal campos escalares y vectoriales.</li><li>• Calcular derivadas parciales y direccionales, determinar gradientes, planos tangentes y valores extremos de una función.</li><li>• Resolver problemas que involucran varias variables.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Proponer la identificación del dominio de una función, hacer representaciones gráficas.</li><li>• Siempre proponer aplicaciones físicas de este tipo de funciones.</li><li>• Utilizar software que ayude a visualizar las gráficas y a realizar operaciones.</li></ul>

## Unidad 5: Integración.

Competencia específica a desarrollar	Actividades de Aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"><li>• Plantear y resolver integrales a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado.</li><li>• Usar software para hallar la representación gráfica de un campo vectorial.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Partiendo de los conceptos de integral de Riemann vistos en Matemáticas 2, hacer una generalización al concepto de integral de funciones de varias variables, interpretándola primero como un área y solicitar que los alumnos la generalicen y lleguen a su interpretación como volumen.</li><li>• Iniciar la unidad con ejemplos de masas y cargas eléctricas.</li><li>• Formalizar el concepto de campo vectorial como una generalización del concepto de gradiente.</li></ul>

### 11.- FUENTES DE INFORMACIÓN

1. Aleksandrov, A. D., Kolmogorov A. N., Laurentiev M. A. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, Alianza Universidad, 1985.
2. Boyer C. B. (1959). *The history of the Calculus and its conceptual development*. New York, Dover Publications Inc.
3. Bressoud
4. Crowe M. J. (1985). *A history of Vector Analysis (The evolution of the Idea of a Vectorial System)*. New York, Dover Publications Inc.
5. Kline M. (1977). *Calculus: an intuitive and physical approach*. 2<sup>nd</sup> edition, New York, Dover Publications Inx.
6. Marsden J. E. & Tromba A. J. (2004). *Cálculo vectorial*, 5<sup>a</sup>. edición, Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana.
7. Stewart J. (1999). *Cálculo multivariable*. México, Thomson.
8. Swokowsky E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*, 2<sup>a</sup>. edición, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Software:

DERIVE  
DPGRAPH  
GYROGRAPHICS  
MATHEMATICA  
MATHCAD  
MAPLE

## 12.- PRÁCTICAS PROPUESTAS

### Práctica # 1:

Los científicos utilizan el término vector para indicar una cantidad que tiene magnitud y dirección (por ejemplo, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_). Un vector suele representarse por una flecha o un segmento de recta. La longitud de la flecha representa la magnitud (\_\_\_\_\_) del vector y la flecha representa la \_\_\_\_\_ del vector. Por ejemplo, la figura 1 muestra una partícula moviéndose a lo largo de una trayectoria en el plano y su vector de velocidad  $\mathbf{v}$  en una ubicación específica de la trayectoria.

**Actividad:** Haz la figura 1.

Aquí, la longitud de la flecha representa la velocidad de la partícula y apunta en la dirección en que se mueve. La figura 2 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio. Aquí el vector de velocidad  $\mathbf{v}$  es un vector tridimensional.

**Actividad:** Haz la figura 2.

### Práctica # 2

Considera un conjunto de funciones y resuelve un problema del curso usando todos los paquetes de software disponibles.

- ¿Cuál es más “amigable”?
- ¿Con cuál resolviste el problema más rápidamente?
- ¿Cuál da soluciones más fáciles de interpretar?
- ¿Cuál da a solución más confiable?
- ¿Cuál escogerías para trabajar de manera cotidiana?

Escribe un reporte con las respuestas a las preguntas anteriores y agrega las dificultades que encontraste en el proceso y las formas en que las resolviste. Compara tus experiencias con tus compañeros